Crecimiento económico y generaciones de capital*

Raouf Boucekkine
CORE y Department of Economics
Université Catholique de Louvain

Omar Licandro
Instituto Universitario Europeo y FEDEA

Luis A. Puch
FEDEA, ICAE y
Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En este artículo se discute el papel que juega la edad del capital en el crecimiento económico. Con este objetivo revisamos algunos resultados al respecto en modelos de crecimiento endógeno en los que el capital físico es heterogéneo por razón de la edad (vintage capital). Cuando las nuevas máquinas contribuyen al stock de capital, o de conocimiento disponible en la economía, de la misma manera que las máquinas heredadas del pasado, entonces la edad de los equipos no juega ningún papel. Sin embargo, este supuesto que está implícito en el modelo de Arrow de Learning by Doing es muy restrictivo, y en general, la edad del capital tiene efectos sobre el crecimiento económico. En claro contraste con el modelo AK estándar que resulta de los supuestos de Arrow, la inclusión de vintage capital en el modelo AK da lugar a una dinámica oscilatoria gobernada por ecos de reemplazo. Este mecanismo puede contribuir a explicar las desviaciones que se observan en los datos de series temporales entre tasa de crecimiento y tasa de inversión. Más aún, cuando se incorpora la depreciación en los efectos de la experiencia en el modelo de Learning by Doing, dicho mecanismo opera también, y da lugar a una serie de implicaciones de relevancia empírica que se discuten en el artículo.
Palabras clave: *generaciones de capital, crecimiento endógeno, learning by doing.*
Clasificación JEL*: E22, E32, 040.*

Abstract

In this paper we investigate the role of vintages in the determination of the growth rate. To this end we discuss some results derived in endogenous growth models in which physical capital is heterogeneous by age (vintage capital). When new equipments do make the same contributions to physical capital, or to the stock of knowledge in the economy, than those inherited from the remote past, the age of capital does not play a role. However, this assumption implicit in Arrow's model of Learning by Doing is quite restrictive, and more in general the age of capital affects the growth rate. In contrast with the standard AK model implied by the assumptions in Arrow's, the vintage capital AK model exhibits oscillatory dynamics governed by replacement echoes. This mechanism can contribute to explaining part of the deviations observed in time series data between the growth rate and the investment rate. Moreover, if

* Los autores agradecen los comentarios de Fernando del Río, Boyan Jovanovic y Franck Portier a una versión anterior. También agradecen la ayuda financiera del Ministerio de Educación y Ciencia, SEJ2004-0459/ECON. Luis A. Puch agradece la financiación de la Fundación Ramón Areces.

a depreciation of experience effect –«forgetting»– is incorporated into the model of Learning by Doing such a mechanism is still at work, and gives rise to a number of empirically relevant implications that are discussed in the paper.

Keywords: *vintage capital, endogenous growth, learning by doing.*

JEL classification*: E22, E32, 040.*

1. Introducción

El papel de la edad del capital en la determinación de la tasa de crecimiento es todavía una cuestión abierta en la literatura. Tal y como plantea Denison (1964), la cuestión de la incorporación del progreso técnico en los nuevos bienes de capital *(the embodiment question)* sería relevante si la edad media de los equipos tuviera un efecto sobre la tasa de crecimiento real del output. Sin embargo, la evidencia sugiere que la edad media del capital varía de manera suave en el tiempo, por lo que dicho efecto, si existe, debería ser poco importante. No obstante, Bahk y Gort (1993) entre otros, ofrecen evidencia respecto a que «el progreso técnico incorporado a los nuevos bienes de capital, medido por la generación de capital promedio, se asocia con un cambio porcentual en el output de entre 2,5 por 100 y 3,5 por 100 por cada cambio en un año en dicha generación». Esta evidencia está en el origen del renovado interés por los modelos de generaciones de capital

Solow *et al.* (1966) muestran, a favor del argumento de Denison, que una economía con capital heterogéneo por razón de la edad, es decir, una economía de generaciones de capital *(vintage capital),* con tasa de ahorro constante, converge a una senda de crecimiento equilibrado (SCE, en lo que sigue) en la que la edad del capital es constante y la tasa de crecimiento coincide con la tasa de progreso técnico. Este modelo genera a lo largo de la SCE una correlación negativa entre la edad de las máquinas, que es endógena, y la tasa exógena de progreso técnico. Sin embargo, este resultado surge porque con tasa de ahorro constante la distribución por edades de las máquinas es estacionaria, lo que implica que la edad media del capital es constante.

En el extremo opuesto, es decir, en el marco de un modelo de crecimiento óptimo con vintage capital y utilidad lineal, Boucekkine, Germain y Licandro (1997) muestran que la economía converge a un equilibrio de largo plazo periódico en el que la edad de las máquinas es constante, pero la tasa de crecimiento del output sigue un patrón periódico –ecos de reemplazo– alrededor del parámetro de progreso técnico. Como consecuencia, la distribución por edades no es estacionaria y la edad media de las máquinas se mueve en dirección opuesta a la tasa de crecimiento. Aunque este resultado no es un argumento contra el de Denison, al menos sí llama la atención sobre las importantes diferencias entre una formulación *á la Solow* y *á la Ramsey* de la cuestión de la incorporación del progreso técnico, al menos en el corto(-medio)-plazo. Evidentemente, una respuesta explícita a la pregunta de Denison requiere pasar del marco de crecimiento exógeno al marco de crecimiento endógeno. A este respecto, el modelo de Arrow (1962) de *Learning by Doing* (LBD) resulta ser la herramienta de partida para analizar la relación entre la edad media de las máquinas y la tasa de crecimiento: Arrow introduce progreso técnico endógeno en una tecnología de vintage. Su especificación de una función de producción Leontieff de generaciones de capital ha resultado útil para analizar las decisones de reemplazo de una manera más tratable que en presencia de sustitución de factores, como ilustran los artículos seminales de Solow *et al.* (1966) y Benhabib y Rustichini (1991, 1993).

El inconveniente para nuestros objetivos es que el supuesto clave del modelo de Arrow permite la agregación de máquinas de distintas edades. En efecto, cuando los nuevos equipos realizan la misma contribución al stock de conocimientos que los equipos heredados del pasado remoto, como ocurre en el modelo de Arrow, la heterogeneidad temporal sencillamente se omite, al menos si se acepta como en Romer (1986) que el stock de conocimiento también se deprecia[1]. En este sentido, la estructura del modelo de Arrow de Learning by Doing a la vez que realista, es simple y con ello demasiado extrema, precisamente para poder obtener resultados explícitos.

En este artículo desarrollamos los fundamentos de la teoría del crecimiento endógeno con vintage capital a partir de estos antecedentes, y con el objetivo de mejorar nuestra comprensión del papel que juega la edad del capital en el crecimiento. En primer lugar, se introduce una versión ampliada del modelo de Arrow de LBD que anida las distintas variantes que se discuten en el artículo. A partir de este marco general se motiva el modelo AK con vintage capital, puesto que la dinámica del modelo de Arrow bajo ciertas especificaciones converge a la del modelo AK con capital homogéneo, lo que facilita la discusión acerca de las consecuencias para la dinámica de hipótesis alternativas. Además, resulta natural iniciar el análisis a partir del modelo de crecimiento endógeno más simple: el modelo AK.

No obstante, si suponemos que la contribución al conocimiento de la inversión en una determinada cosecha se deprecia con la edad, entonces podemos escribir una versión ampliada del modelo de LBD de Arrow, en la que la integración respecto al tiempo no puede sustituirse por la integración con respecto al conocimiento, y que por tanto preserva la heterogeneidad del capital en el tiempo y respecto al stock de conocimientos. Nos vamos a referir al supuesto que recoge la depreciación de los efectos de la experiencia como *forgetting*, y al modelo que anida el de Arrow y con ello por tanto el modelo AK estándar como de *Learning by doing but forgetting*.

[1] ROMER (1986) supone implicitamente que el conocimiento se deprecia a la misma tasa que lo hace el capital, de manera que los productores de los bienes de capital olvidan el conocimiento pasado a medida que el tiempo pasa. Esta no es la única diferencia entre las especificaciones de Arrow y Romer. En primer lugar, en el modelo de Arrow el conocimiento y el stock de capital son diferentes conceptos, mientras que en Romer son idénticos conceptos. En segundo lugar, el progreso técnico se distribuye sobre todos los equipos en Romer, mientras que está incorporado a las nuevas máquinas en Arrow. D'AUTUME y MICHEL (1993) ilustran hasta que punto el mensaje de Romer está ya contenido en el artículo de Arrow.

El artículo se organiza como sigue. La sección 2 presenta el marco general a partir del que relajar sucesivamente los supuestos que nos llevan al modelo AK vintage y a las distintas variantes del modelo de Learning-by-doing-but-forgetting. Para mantener la generalidad, la presentación se inicia en un marco de crecimiento óptimo *à la* Ramsey. Posteriormente la dicusión se restringe al caso de tasa de ahorro exógena con el fin de resaltar las implicaciones de largo plazo de los distintos supuestos. Así, la sección 3 examina cómo el supuesto vintage rompe el vínculo directo que existe en el modelo AK estándar entre tasa de inversión, y por tanto su edad, y tasa de crecimiento. La sección 4 discute las implicaciones de largo plazo para la relación entre edad del capital y crecimiento del supuesto de Learning by Doing, sin y con depreciación de los efectos de la experiencia. La sección 5 discute algunas cuestiones relacionadas de relevancia empírica así como la importancia cuantitativa del supuesto de forgetting. La sección 6 concluye.

2. El marco general: *Learning-by-doing-but-forgetting*

El marco general corresponde al óptimo social de una versión del modelo de Arrow (1962) de Learning by Doing. El modelo de Arrow (1962) es un precursor de los modelos de crecimiento endógeno, y como discuten d'Autume y Michel (1993), el primero que puede analizarse en términos de una tecnología vintage. Su supuesto clave es que el stock de conocimientos está asociado con Learning by Doing en el sector de bienes de capital. La producción de bienes de capital aumenta el conocimiento de los productores de dichos bienes, lo que les permite mejorar la productividad del trabajo de las nuevas máquinas. Sin embargo, la especificación de Arrow es de alguna manera muy extrema: se supone que detener la producción de bienes de capital no tiene efectos negativos sobre el stock de conocimiento de los productores. Este segundo efecto de la inversión que denominamos «forgetting», puede introducirse en el marco de Arrow de manera sencilla, suponiendo que la contribución al conocimiento de la inversión en una determinada cosecha se deprecia con la edad. El agente representativo de esta economía resuelve

$$\max V = \int_0^\infty u[c(t)]e^{-\rho t}dt$$

sujeto a

$$y(t) = b \int_{t-T(t)}^{t} e^{-\delta(t-z)}i(z)dz \tag{1}$$

$$\int_{t-T(t)}^{t} i(z)(dk(z))^{-\beta}dz = l(t) = 1 \tag{2}$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^{t} i(z)e^{-m(t-z)}dz \tag{3}$$

$$y(t) = c(t) + i(t) \tag{4}$$

$$0 \leq i(t) \leq y(t) \tag{5}$$

dado $k(t)$, donde $y(t)$, $l(t)$ y $i(t)$ representan respectivamente producción, empleo e inversión en t. $T(t)$ denota la edad de la máquina más antigua todavía en uso en t. Las ecuaciones (1) y (2) representan la tecnología vintage, en la que la productividad de las máquinas decrece con la edad, y viene dada por $b \cdot \mathrm{e}^{-\delta(t-z)}$ para la generación z en t. El parámetro δ representa la depreciación de la calidad productiva de las máquinas. El progreso técnico está incorporado en las nuevas máquinas, es decir, el requerimiento de trabajo de cada vintage depende del estado del conocimiento en el momento de la producción. La productividad del trabajo asociada con la cosecha t, $k(t)^{\beta}$, cambia de una cosecha a otra, pero permanece constante para una cosecha dada. El supuesto de *forgetting* se incorpora en la ecuación (3), donde $k(t)$ es una medida del stock de conocimiento en la economía. Como en Arrow (1962), se supone que hay efectos de escala en la producción de los bienes de capital, y que el conocimiento individual correspondiente es un bien público.

Las condiciones de primer orden para una solución interior son:

$$\omega(t) = b\phi(t)(dk(t - T(t)))^{\beta}\mathrm{e}^{-\delta T(t)} \tag{6}$$

$$\phi(t) = u'[y(t) - i(t)] \tag{7}$$

$$u'[y(t) - i(t)]\mathrm{e}^{-\rho t} = \int_{t}^{t+J(t)} b\left[e^{-\delta(z-t)} - k(z - T(z))^{\beta}k(t)^{-\beta}\mathrm{e}^{-\delta T(z)} - \frac{\mu(z)\mathrm{e}^{-\delta(z-t)}}{u'[y(z) - i(z)]} \right] u'[y(z) - i(z)]\mathrm{e}^{-\rho z}dz \tag{8}$$

$$\mu(t)\mathrm{e}^{-\rho t} = \frac{i(t)}{k(t)^{\beta+1}} \int_{t}^{t+J(t)} \omega(z)\mathrm{e}^{-\rho z}dz \tag{9}$$

que conjuntamente con (1)-(4) determinan $\omega(t)$, $\phi(t)$, $\mu(t)$, $T(t)$, $i(t)$, $y(t)$, $k(t)$, $c(t)$. El lector interesado en los detalles técnicos de la especificación *à la Ramsey* de esta familia de modelos puede ver, por ejemplo, Boucekkine *et al.* (1998), o alternativamente Boucekkine *et al.* (2005) para una aproximación de control óptimo con retardos *delays*. A continuación nos limitamos a caracterizar someramente el comportamiento del modelo y mostramos que presenta algunas propiedades interesantes.

Proposición 1. *Si* $m \neq 0$, *entonces* $y(t)$ *no puede en general expresarse únicamente en función de* $k(t)$.

Prueba

Si sustituimos (3) diferenciada en (2) entonces, el vaciado del mercado de trabajo no permite expresar $k(t - T(t))$ como una función exclusivamente de $k(t)$. Por tanto, $y(t)$ no es en general sólo una función de $k(t)$.

Es decir, es exactamente el hecho de que $m \neq 0$, lo que rompe la homogeneidad del capital. Más aún, se sigue el siguiente corolario.

Corolario 1. *Si* $\delta \neq m = 0$, *entonces* $y(t)$ *no puede expresarse en función de* $k(t)$ *y* $k(t - T(t))$.

Prueba

Alternativamente, si $\delta = m$, entonces $y(t) = b[k(t) - k(t - T(t))]$.

1. Como se formula en el corolario 1, la homogeneidad se rompe si $\delta \neq 0$ también, incluso si $m = 0$, y esto puede tener consecuencias dinámicas.
2. $m = \delta = 0$ recoge la especificación de d'Autume y Michel (1993). De este modo se puede escribir una función de producción agregada, lo que permite obtener resultados analíticos. Por tanto, la versión *à la Ramsey* del modelo de Arrow (1962) puede resolverse por un método exacto, lo que puede usarse para validar métodos numéricos en entornos más generales.

2.1. Equilibrio estacionario

Para $T(t) = T$ con

$$u[c(t)] = \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

y $i(t) = ie^{\gamma t}$, $y(t) = ye^{\gamma t}$, $k(t) = ke^{\gamma t}$, si y sólo si $\beta = 1$, implica que

$$k = \frac{i}{\gamma + m} \tag{10}$$

$$y = \frac{bi}{\gamma + \delta}\,[1 - e^{-(\gamma+\delta)T}]$$

$$T = \frac{dk}{i} = \frac{d}{\gamma + m}$$

y

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\delta + \sigma\gamma + \rho}\,[1 - e^{-(\delta+\sigma\gamma+\rho)T}] + \frac{e^{-(\delta+y)T}}{m + \sigma\gamma + \rho}\,[1 - e^{-(\delta+\sigma\gamma+\rho)T}] \tag{11}$$
$$\equiv F(\gamma, T, \Theta)$$

puede resolverse en T, dado $\gamma = d/T - m$, con $\gamma(1 - \sigma) - \rho < 0$ para que el objetivo V esté acotado.

Es inmediato verificar que en el caso $\delta = m$,

$$\gamma = \frac{[(1 - e^{-d}) - \rho - \delta}{\sigma}$$

2.2. Una breve discusión acerca de los rendimientos a escala

Alternativamente, para $\beta \neq 1$, entonces (2) con $k(t) = ke^{\gamma t}$ resulta en

$$\frac{id^{-\beta}k^{-\beta}}{\gamma(1 - \beta)}\, e^{\gamma(1-\beta)t}[1 - e^{-\gamma(1-\beta)T(t)}] = 1 \tag{12}$$

Si $\beta > 1$, (12) se cumple si $e^{-\gamma(1-\beta)T(t)}$ va a infinito de manera que $T(t) \to \infty$. Sustituyendo este resultado en la versión de $F(\gamma, T, \Theta)$ que resulta cuando $\beta \neq 1$ obtenemos

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\delta + \sigma\gamma + \rho} - \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(\delta+\beta\gamma)T} - e^{-(\gamma\sigma+\rho+\delta)T}}{\gamma\sigma - \beta\sigma + \rho} \tag{13}$$

de manera que $\gamma \to (b - \rho - \delta)/\sigma$ a largo plazo y se obtiene una Senda de Crecimiento Equilibrado (SCE) a pesar de los rendimientos crecientes. Esta es una buena propiedad de la externalidad considerada por Arrow.

Si $\beta < 1$, entonces $e^{-\gamma(1-\beta)T(t)}$ tiende a uno. En la medida que $T(t)$ no puede ir a cero como resultado de la regla óptima de inversión: $1/b = \lim_{T\to\infty} [\ ] = 0$ no es posible, por lo que γ tiene que tender a cero: el caso de crecimiento exógeno.

2.3. Propiedades de $F(\cdot)$

Si nos centramos en el caso $\beta = 1$. Entonces $\gamma = d/T - m$, lo que restringe T al intervalo $(0, d/m)$ para $\infty > \gamma > 0$. Entonces, $F(\cdot)$ puede reescribirse como

$$\frac{1}{b} \int_0^T [1 - e^{-(d/T+\delta-m)(T-z)}]e^{-(\delta+\rho+\sigma d/T-\sigma m)z} dz \equiv F(T, \Theta) \tag{14}$$

Proposición 2. *Si* $\delta \geq m$, *existe una única solución para T si ocurre que*

- $\gamma(1 - \sigma) < \rho$
- $F(d/m, \Theta) > 1/b$

Prueba

Notese que

$$\Psi(T) = e^{-(d/T+\delta-m)(T-z)} = e^{(d/T+\delta-m)z}e^{-(\delta-m)T-d}$$

De manera que $\Psi(T)$ es decreciente en T como producto de dos funciones positivas decrecientes en T. Por tanto, $1 - \Psi$ es creciente en T. Finalmente todo el integrando es creciente en T como producto de dos funciones crecientes en T positivas. Por consiguiente $F(T, \Theta)$ es creciente en T.

Se puede demostrar que si $\delta \leq m$, $F(T, \Theta)$ admite un único óptimo global. Por tanto, como máximo existen dos valores estacionarios para T.

3. El Modelo AK con Vintage Capital

Como hemos visto, el caso $m = \delta = 0$ recoge la especificación de d'Autume y Michel (1993) en términos vintage del modelo de Arrow (1962). Bajo rendimientos constantes a escala, $\beta = 1$, y con población constante, es fácil verificar como hacen estos autores que el modelo de Arrow colapsa en el modelo AK de los modelos de crecimiento estándar con capital homogéneo. Este caso ha sido bien estudiado tanto en el caso de tasa de ahorro exógena como en el marco de los modelos de crecimiento óptimo. Esta peculiaridad del modelo de Arrow es precisamente una de sus virtudes, puesto que sirve como referencia para especificaciones alternativas de crecimiento endógeno con vintage capital.

En claro contraste con el modelo AK estándar que resulta de los supuestos de Arrow, la inclusión de vintage capital en el modelo AK da lugar a una dinámica oscilatoria gobernada por ecos de reemplazo. Podemos examinar esta circunstancia, en relación con el caso particular de la tecnología vintage (1) y (2) de la sección anterior, si suponemos una sencilla tecnología AK modificada para incorporar el supuesto más sencillo que hace relevante la edad del capital: una tecnología con depreciación *one-hoss shay*[2].

$$y(t) = A \int_{t-T}^{T} i(z)\mathrm{d}z \tag{15}$$

[2] Este supuesto captura la idea de que algunas máquinas se deprecian de una vez, como las bombillas.

donde $y(t)$ representa la producción en t y $i(z)$ representa la inversión en el instante z, lo que corresponde a la generación z. Como en el modelo AK, la productividad del capital es constante y estrictamente positiva, y sólo los bienes de capital son necesarios para la producción. Por tanto, no hay externalidad alguna, y se supone que el capital se deprecia repentinamente y en su totalidad después de $T > 0$ unidades de tiempo.

Dicha tecnología tiene propiedades interesantes. Podemos llamar $k(t)$ a la integral en el lado derecho de (15), que puede interpretarse como el stock de capital. Si suponemos que $i(z)$ es continua para todo t, entonces es posible diferenciar respecto al tiempo y obtener:

$$k'(t) = i(t) - i(t - T) = i(t) - \delta(t)k(t)$$

donde $\delta(t) = \dfrac{i(t-T)}{k(t)}$. En el modelo AK estándar, la depreciación es constante. Sin embargo, en la versión one-hoss shay, la tasa de depreciación depende de la inversión retardada, lo que pone de manifiesto la estructura vintage del modelo.

Por otro lado, la especificación de la función de producción no introduce progreso técnico alguno. Sin embargo, como en el modelo AK estándar, el hecho de que los rendimientos del capital sean constantes a escala resulta en crecimiento sostenido a largo plazo. Por tanto tenemos un modelo de crecimiento endógeno con vintage capital, pero sin progreso técnico (incorporado).

En el caso de una economía del tipo Solow-Swan, en la que se supone que la tasa de ahorro es exógena y constante, $0 < s < 1$, el equilibrio puede escribirse como una ecuación integral con *delay*:

$$i(t) = sA \int_{t-T}^{t} i(z)\mathrm{d}z \tag{16}$$

con condiciones iniciales $i(t) = i_0(t) \geq 0$ para todo $t \in [-T, 0]$. Bajo supuestos convenientes de diferenciabilidad (cf. Boucekkine *et al.,* 2005] podemos reescribir el equilibrio como una ecuación diferencial en diferencias de tipo retardado (Delayed-Differential Equation, DDE en lo que sigue) con retardo exógeno T, en $i(t)$, $\forall\ t \geq 0$,

$$i'(t) = sA(i(t) - i(t - T)) \tag{17}$$

con $i(t) = i_0(t) \geq 0$ para todo $t \in [-T, 0[$ y $i(0) = sA \int_{-T}^{0} i_0(z)\mathrm{d}z$

Por tanto, los cambios en el output dependen linealmente de la diferencia entre *creación* (inversión hoy) y *destrucción* (inversión pasada). Puesto que la inversión es una fracción constante del output, cambios en la inversión son también una función lineal de creación menos destrucción como especifica la ecuación (17). Cabe esperar por tanto que la dinámica asociada sea no monótona y esté gobernada por efectos de eco.

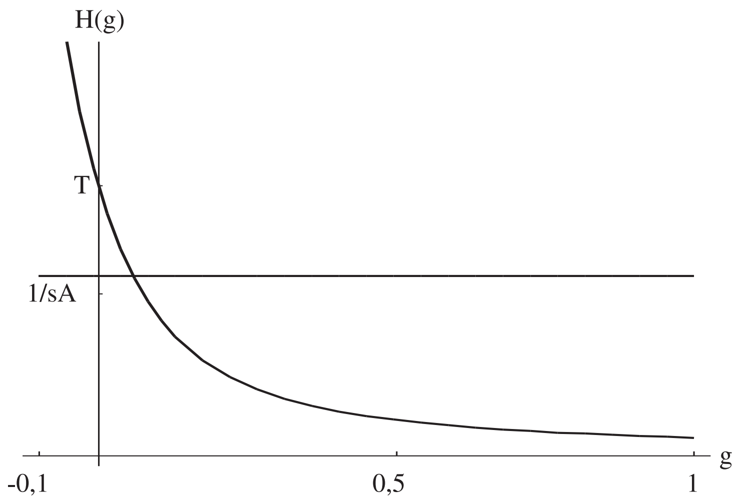
A partir de la ecuación (17) es fácil verificar que la Senda de Crecimiento Equilibrado (SCE) viene caracterizada por una tasa de crecimiento $\gamma \neq 0$, tal que

$$\gamma = sA(1 - e^{-\gamma T}) < sA \tag{18}$$

La tasa de crecimiento correspondiente al caso estándar, $T = \infty$, es sA. Para T finito, las máquinas se deprecian, por lo que la tasa de crecimiento es menor que en el caso estándar de vida infinita de las máquinas. Con la restricción de parámetros $T > 1/sA$ la tasa de crecimiento $\gamma = \gamma(T)$ dados s y A, existe y es única como se muestra en la Figura 1. Una máquina produce AT unidades de output a lo largo de su vida productiva y, dado el patrón inversor de los hogares, produce sAT unidades de capital. Para que la tasa de crecimiento sea positiva cada máquina tiene que producir más de la unidad de bien necesaria para producirla, i.e., sAT tiene que ser mayor que uno.

FIGURA 1

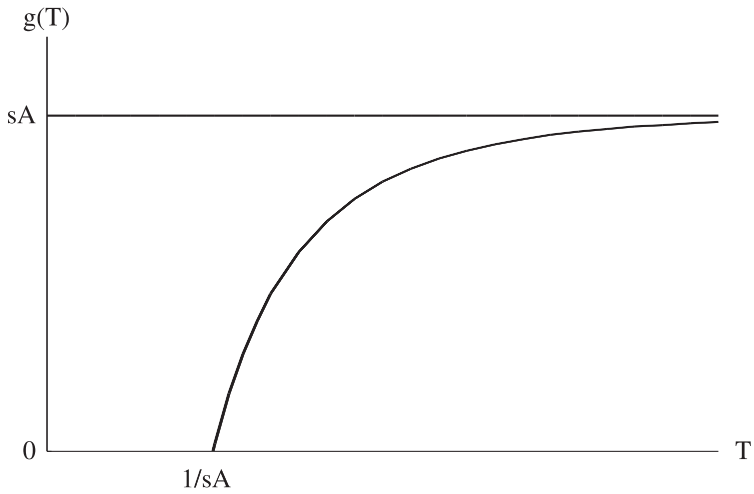
DETERMINACIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO



La Figura 2 muestra la relación positiva entre la tasa de crecimiento y la vida de las máquinas. Puesto que las máquinas de todas las generaciones son igualmente productivas, un aumento en T es equivalente a un descenso de la tasa de depreciación en el modelo AK, lo que es positivo para el crecimiento. Por supuesto, cuando T tiende a inifinito, $\gamma(T)$ está acotado por sA, que es el caso límite del modelo AK con depreciación nula: (18) es simplemente $\gamma = sA$. El efecto positivo sobre el crecimiento de tanto la tasa de ahorro como de la productividad del capital es inmediato, y está presente tambien en el modelo AK.

FIGURA 2

LA TASA DE CRECIMIENTO DE LA SCE



3.1. Dinámica de la inversión y el output

Si definimos la inversión detrendada como $\hat{i}(t) = i(t)e^{-gt}$ podemos escribir a partir de (17) y (18),

$$\dot{\hat{i}}(t) = (sA - g)[\hat{i}(t) - \hat{i}(t - T)] \tag{19}$$

Esta ecuación es una DDE que caracteriza la dinámica de corto plazo del modelo, y que puede resolverse numericamente por aplicación del Método de *Steps* tal y como discuten Boucekkine, Licandro y Paul (1997). Para ilustrar sus propiedades realizamos un ejercicio numérico con los siguientes valores de los parámetros: $S = 0{,}275$, $A = 0{,}30$ Y $T = 15$. Un shock en cualquiera de estos parámetros que eleva la tasa de crecimiento a largo plazo en un 5 por 100, dadas unas condiciones iniciales $i_0(t) = e^{g_0 t}$ para todo $t < 0$, con $g_0 = 0{,}0282$, resulta en una dinámica de transición oscilatoria a la nueva SCE, tal y como muestran las Figuras 3 y 4. La principal observación es que la tasa de crecimiento no es constante desde $t = 0$ como ocurre en el modelo AK estándar. Algunas implicaciones de esta propiedad se discuten en la sección 5.

FIGURA 3

OUTPUT SIN TENDENCIA (CON TASA DE AHORRO CONSTANTE)

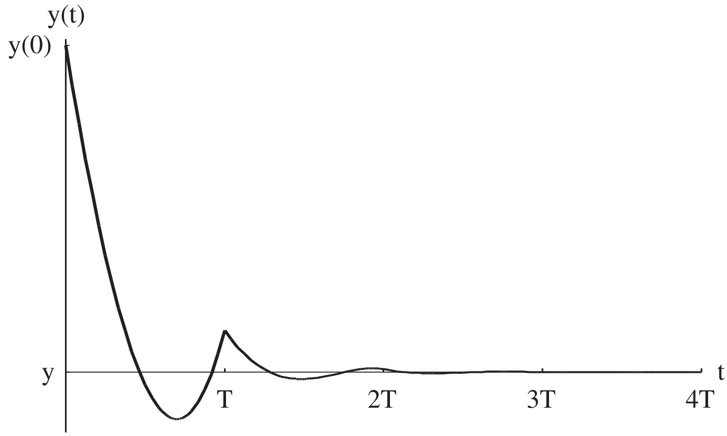
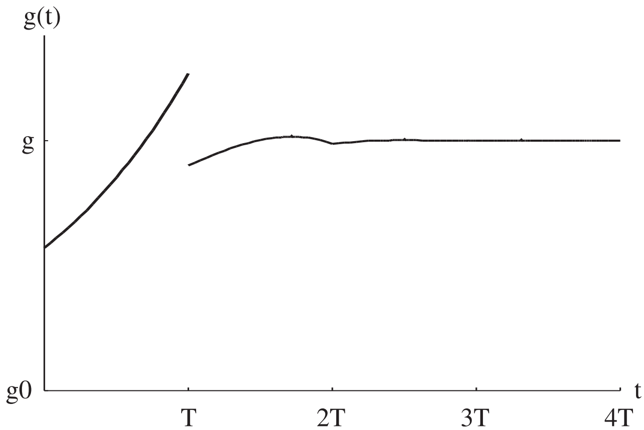


FIGURA 4

TASA DE CRECIMIENTO (CON TASA DE AHORRO CONSTANTE)



4. El modelo de Arrow con *forgetting*

Como hemos visto, introducir el supuesto de depreciación de los efectos de la experiencia *(forgetting)* en el modelo de Arrow permite preservar la estructura vintage del modelo. Más allá de su realismo, este supuesto nos permite analizar la relación entre la edad de las máquinas y la tasa de crecimiento endógena de la economía. Para ilustrar el papel que juega el supuesto de forgetting nos centramos de nuevo en el modelo de la sección 2, pero en su versión con tasa de ahorro exógena y constante

$$i(t) = s \cdot y(t) \tag{20}$$

Al hacerlo, eliminamos la posibilidad de que se de actividad de reemplazo, y como consecuencia, la posibilidad de que haya interacción entre la tasa de crecimiento de la economía y la edad media de las máquinas debida a la aparición de ecos de reemplazo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que estamos evaluando la economía en el instante $t = 0$. El sistema (1)-(3) con (20) se verifica para todo $t \geq 0$ (en lo que sigue suponemos $d = 1$ en la ecuación (2)). Para resolver este problema necesitamos: i) condiciones iniciales para la inversión, i.e., $i(t)$, $\forall t < 0$; ii) suponer que (3) se verifica para todo $t < 0$.

Diferenciando el sistema (1)-(3), (21) con respecto a t, se obtiene

$$y'(t) = b \cdot s \cdot y(t)\left[1 - e^{-\delta T(t)}\left(\frac{k(t)}{k(t - T(t))}\right)^{-\beta}\right] \tag{21}$$

$$T'(t) = 1 - \frac{i(t)}{i(t - T(t))}\left(\frac{k(t)}{k(t - T(t))}\right)^{-\beta} \tag{22}$$

$$k'(t) = i(t) - mk(t) \tag{23}$$

$$i'(t) = s \cdot y'(t) \tag{24}$$

El sistema (21)-(24) es un sistema de DDEs con retardo endógeno $T(t)$. Además, es necesario inicializar el sistema resolviendo (1)-(3), (20) en $t = 0$.

Este sistema DDE no puede resolverse en general utilizando métodos matemáticos estándar. Además, la dinámica de corto plazo tiene que resolverse numéricamente. En el modelo de Arrow, en el caso en el que $m = 0$, un cambio de variable apropiado reduce el sistema a uno de ecuaciones diferenciales ordinario (por tanto, Ordinary Differential Equations ODE) en $k(t)$ como ilustran excelentemente d'Autume y Michel (1993).

4.1. Crecimiento equilibrado

Es inmediato definir y calcular la Senda de Crecimiento Equilibrado (SCE) de esta economía a partir del sistema (21)-(24). Definimos una SCE como un equilibrio donde existe $t_0 \geq 0$, tal que $y(t) = ye^{\gamma t}$, $i(t) = ie^{\gamma t}$ y $k(t) = ke^{\gamma t}$, para todo $t \geq t_0$. Se trata de resolver para la tasa de crecimiento γ y las constantes y, i y k.

Bajo rendimientos constantes a escala en el stock de conocimiento, i.e., $\beta = 1$, de (1)-(3), (20) es fácil verificar que existe una SCE con una solución constante para $T(t)$. Bajo rendimientos crecientes, sólo existe una SCE como una situación límite en la que $T'(t)$ tiende a uno cuando t crece. En la sección siguiente se muestra que la economía siempre converge a una tasa de crecimiento constante, pero la edad de las máquinas sólo converge a una constante cuando $\beta \leq 1$, i.e., cuando no hay rendimientos crecientes en el conocimiento.

Otra propiedad interesante a analizar es la interacción entre las condiciones iniciales y los niveles de inversión y output *detrendados* a lo largo de la SCE. Por el momento, utilizaremos una caracterización matemática de dicha interacción, centrandonos en el estado estacionario de largo plazo. Diremos que la SCE es *Incondicionalmente* (Resp. *Condicionalmente*) determinada si todas las variables de estado estacionario (esto es γ, i, y y k) lo están (Resp. no lo están todas) por las condiciones de largo plazo. De acuerdo con esta definición, la determinación condicional se refiere simplemente a la falta de determinación del sistema que caracteriza la SCE, que cabe esperar que cubra los casos en los que las condiciones iniciales de la economía interactúan fuertemente con sus estados de largo plazo.

La constancia de la regla de reemplazo a lo largo de la SCE y la determinación condicional de las sendas de largo plazo se estudian a continuación en las tres situaciones posibles que se derivan de la existencia de rendimientos a escala constantes, decrecientes o crecientes en el conocimiento.

Rendimientos Constantes a Escala en el Conocimiento

Comencemos por analizar el caso de rendimientos constantes a escala en el conocimiento, i.e., cuando $\beta = 1$, el caso que corresponde al del modelo AK de los modelos de crecimiento estándar con capital homogéneo.

De (1)-(3), (20) es inmediato mostrar que a lo largo de la SCE:

1. Existe una relación inversa entre la edad de descarte de las máquinas (o la edad media) y la tasa de crecimiento de la economía

$$T = \frac{1}{\gamma + m} \tag{25}$$

2. El crecimiento es endógeno, en el sentido de que depende de la tasa de ahorro y de los parámetros tecnológicos δ, b y m:

$$\gamma + \delta = b \cdot s \cdot \left[1 - \exp\left\{ -\frac{\gamma + \delta}{\gamma + m} \right\} \right] \tag{26}$$

   Una condición suficiente para que γ sea positivo es que $b \cdot s \geq \delta$.

3. La SCE está condicionalmente determinada y las condiciones de la SCE sólo permiten determinar los ratios

$$\frac{i}{k} = \gamma + m \quad \text{y} \quad \frac{i}{k} = s$$

   Es importante llamar la atención sobre que estos tres resultados, y en particular la relación inversa entre la tasa de crecimiento y la edad del capital, también se verifican en el modelo de Arrow. Implícitamente, Arrow dió una respuesta en los sesenta a la crítica de Denison.

Rendimientos Decrecientes a Escala en el Conocimiento

Bajo rendimientos decrecientes en el conocimiento, i.e., cuando $\beta < 1$, de (1)-(3), (20) se puede mostrar que a lo largo de la SCE:

1. La tasa de crecimiento a largo plazo es cero, lo que implica por tanto que no hay crecimiento endógeno. Hay que destacar que la ecuación (1) se verifica para todo $T < \infty$ si $\delta = 0$, pero si $\delta > 0$, entonces

$$T = -\frac{1}{\delta} \log \left[1 - \frac{\delta}{b \cdot s} \right]$$

   En este último caso, exigimos que $b \cdot s > \delta$.
2. De la ecuación (3),

$$T = m \cdot i^{\beta - 1}$$

   que determina i si $\delta > 0$.
3. Como en el caso de rendimientos constantes, los ratios de inversión sobre conocimiento y de inversión sobre output tienen que verificar a lo largo de la SCE:

$$\frac{i}{k} = m \quad \text{y} \quad \frac{i}{y} = s$$

   Nótese que cuando $\delta > 0$, i, y y k están bien determinados y la SCE está incondicionalmente determinada. Sin embargo, cuando $\delta = 0$, la SCE está sólo condicionalmente determinada.

Rendimientos Crecientes a Escala en el Conocimiento

Bajo rendimientos crecientes a escala en el conocimiento, i.e., cuando $\beta > 1$, de (1)-(3), (20) se puede mostrar que a lo largo de la SCE:

1. La tasa de crecimiento está endógenamente determinada,

$$\gamma = b \cdot s - \delta$$

2. De la ecuación (3) podemos mostrar que $T(t) \to \infty$, cuando $t \to \infty$. Por tanto, de (23), podemos mostrar que $T'(t) \to 1$, cuando $t \to \infty$, que implica que

$t - T(t) \rightarrow \hat{t} < \infty$ (una constante), cuando $t \rightarrow \infty$. Dicho de otra manera, a lo largo de la SCE la economía deja de descartar unidades de capital para permitir el vaciado del mercado de trabajo.

3. Como en los dos casos anteriores,

$$\frac{i}{k} = m \quad \text{y} \quad \frac{i}{y} = s$$

Como en la mayor parte de los casos anteriores, la SCE está condicionalmente determinada.

Es importante destacar que la introducción de cosechas de capital bajo complementariedad bruta de factores excluye el resultado estándar obtenido en economías con capital homogéneo, que establece que bajo rendimientos crecientes a escala el crecimiento no está acotado. Este resultado puede interpretarse como que bajo rendimientos crecientes a escala el progreso técnico incorporado a las nuevas cosechas de capital crece a una tasa $\beta \cdot \gamma$, que es mayor que la tasa de crecimiento de la economía. El aumento permanente en la edad de las máquinas aumenta su edad media, lo que en parte compensa los efectos del progreso técnico de manera que la tasa de cambio técnico agregado se reduce a γ. Sin duda, si permitimos la sustitución entre capital y trabajo, recuperamos el caso límite de Romer, como muestra Levahri (1966): el crecimiento sólo está acotado para $\beta = 1$. Sin embargo, el marco de LBD *à la Arrow* proporciona un caso teórico extremadamente interesante en el que crecimiento acotado y rendimientos crecientes no son inconsistentes. Como se muestra a continuación, este caso se presta a una interpretación atractiva de la desigualdad (exclusión social), que necesita ser examinada en entornos más generales que permitan cierta sustitución entre capital y trabajo. Esto requiere la construcción de modelos alternativos, ciertamente de estructura más rica que los modelos considerados por Romer y Levahri.

4.2. Dinámica de corto plazo y convergencia a la SCE

En el modelo de Arrow, el sistema (22)-(24) puede reducirse a un sistema ODE en $k(t)$, con condición inicial $k(0)$. En este caso límite, D'Autume y Michel (1993) muestran que la solución converge a las sendas de crecimiento equilibrado descritas en la sección anterior. En casi todos los casos, estas SCE están condicionalmente determinadas tal y como se ha discutido. Podemos desarrollar más esta propiedad llamando la atención sobre sus consecuencias económicas. Intuitivamente, la determinación condicional recupera los casos en los que las condiciones iniciales, es decir la historia, determinan los niveles de largo plazo de producción e inversión sin tendencia. Esto se hace suponiendo que las economías que se consideran convergen a SCE. Esto significa que dos economías que comparten el mismo entorno pero que por ejemplo disponen de stocks de conocimiento iniciales distintos convergen a la misma tasa de crecimiento pero a niveles distintos de output per capita.

En realidad, las implicaciones económicas más interesantes de la propiedad de determinación condicional provienen del supuesto de depreciación de los efectos de la experiencia, *forgetting*. Cuando comparamos el modelo de Arrow (sin forgetting) con Romer (1986), encontramos las siguientes diferencias y similitudes:

1. Bajo rendimientos constantes, los dos modelos tienen las mismas propiedades en lo relativo a la determinación condicional. En ambos modelos, dos economías que comparten el mismo entorno y el mismo stock inicial de conocimiento, convergen también en niveles. En ambos modelos, el pasado de la inversión no tiene efectos en el equilibrio de largo plazo.
2. En la línea que se ha discutido anteriormente, la principal diferencia entre ambos modelos es que en el modelo de Arrow el crecimiento nunca es no acotado.

Puesto que no hay manera de resolver matemáticamente el sistema DDE (22)-(24), sería necesario resolver el problema numéricamente. Una posibilidad es seguir los métodos descritos Boucekkine, Licandro y Paul (1997) como hemos hecho aquí. Encontramos los siguientes resultados[3]:

1. Economías con el mismo entorno e idéntico stock inicial de conocimiento, $k(0)$, pero distintos perfiles de inversión iniciales, no convergen necesariamente a la misma SCE incluso si necesariamente convergen en tasas de crecimiento.
2. A diferencia del modelo de Arrow, la convergencia es no monótona, y existe una sobre reacción en la tasa de crecimiento al principio de la transición dinámica.

5. Algunas implicaciones del modelo

En esta sección discutimos algunas de las implicaciones de las distintas versiones del modelo que tienen mayor relevancia empírica. Recordemos que el modelo básico bajo rendimientos constantes a escala y población constante pierde por agregación la estructura vintage. Por tanto, el modelo básico vintage sería la versión AK con vida finita de las máquinas. Para recuperar el papel del input trabajo en la tecnología, a la vez que preservamos la estructura vintage del modelo, hemos propuesto la versión de Learning by Doing con depreciación de los efectos de la experiencia, alguna de cuyas propiedades discutimos a continuación.

5.1. Inversión y crecimiento

[3] Para las simulaciones suponemos que el período del modelo es un año y, consistentemente con los datos de Estados Unidos: $b = 1/3$ (capital es tres veces el output), $s = 0{,}27$ y $m = 0{,}06$, lo que implica, si $\beta = 1$, que $\gamma(t)$ y $T(t)$ convergen respectivamente a 0,02 y 12,5.

¿Puede el modelo AK vintage dar alguna respuesta frente al modelo AK estándar? Un caso ilustrativo se refiere a la justificación de las desviaciones observadas entre tasas de crecimiento y tasas de inversión que discute Jones (1995). La Figura 5 muestra el comportamiento de corto plazo de ambas tasas en la versión de crecimiento óptimo del modelo AK vintage, tal y como discuten Boucekkine et al. (2005). Como sugiere la evidencia, y en claro contraste con la predicción del modelo AK estándar, ambas tasas no se mueven por igual. La razón por la que se da este resultado en el modelo AK vintage es porque la relación entre ambas tasas es no lineal. En efecto, la ley de evolución del capital puede escribirse como

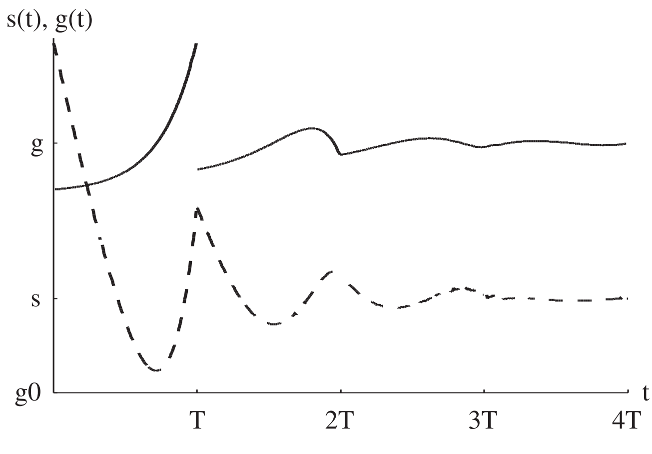
$$g(t) = A\,\frac{i(t)}{y(t)} - \delta(t)$$

donde $\delta(t)$ se define como $Ai(t - T)/y(t)$. A largo plazo, la relación entre ambas tasas es positiva, pero a corto plazo la tasa de crecimiento depende también de la inversión retardada. Si por ejemplo se produce un aumento permanente en A en $t = 0$, inicialmente, hay escasez de capital lo que hace más rentable ahorrar e invertir: $s(0) > s$. A medida que aumenta el stock de capital, los incentivos a ahorrar e invertir decrecen. En el intervalo $t \in [0, T]$ la creación de capital es mayor que la destrucción, lo que hace aumentar el stock de capital a una tasa mayor que g_0. Esto reduce la tasa de depreciación y hace aumentar la tasa de crecimiento.

El tipo de fluctuaciones que genera el modelo dan lugar a implicaciones de la

FIGURA 5

TASA DE CRECIMIENTO Y TASA DE AHORRO (CON TASA DE AHORRO ENDÓGENA)



teoría vintage AK que podrían contrastarse. Sólo las propiedades de la tecnología juegan un papel en estas fluctuaciones. McGrattan (1998) explica las desviaciones observadas entre tasas de crecimiento y tasas de inversión a través de distorsiones fiscales que afectan el ratio capital-output. En nuestro modelo, el ratio capital-output, A, permanece constante por construcción. Por tanto, la predicción de nuestro modelo es de naturaleza bien distinta a la que propone McGrattan.

5.2. Exclusión Social y Progreso Técnico

En el caso de Learning by Doing but Forgetting se puede realizar una interpretación interesante para el caso $\beta > 1$ que ilustra sobre algunas de las implicaciones del modelo. En este caso, la economía converge a una tasa de crecimiento constante que viene dada por $b \cdot s - \delta$, y en la que conocimiento e inversión crecen a la misma tasa. Puesto que hay rendimientos crecientes en el conocimiento, el progreso técnico $\beta \cdot \gamma$, es sistemáticamente mayor que la tasa de crecimiento. Como consecuencia, la vida de las máquinas tiene que aumentar permanentemente y en el límite, no hay más actividad de reemplazo. Este resultado es fácil de entender toda vez que se mira a la condición de equilibrio en el mercado de trabajo: para vaciar el mercado de trabajo las maquinas viejas tienen que estar activas para siempre, porque en el límite las nuevas máquinas no necesitan trabajo en absoluto. Más aún, el trabajo es un bien homogéneo y se remunera a su productividad marginal, que viene dada por la productividad del *vintage* marginal, i.e.,

$$w(t) = b \cdot e^{-\delta \cdot T(t)} \cdot k(t - T(t))^{\beta} \tag{27}$$

A lo largo de la Senda de Crecimiento Equilibrado (SCE), la máquina marginal es la misma para siempre, lo que implica que el salario real de equilibrio va a cero. Este es un resultado interesante: los rendimientos crecientes en el conocimiento generan un progreso técnico muy elevado, pero no es posible que los trabajadores se beneficien del crecimiento en presencia de mercados de trabajo no cualificados. ¿Podría este resultado explicar el extremado aumento de pobreza relativa y la exclusión social en algunos segmentos de la economía americana, en los que el trabajo no cualificado no se beneficia del crecimiento y de las mejoras de productividad? Para contestar a esta pregunta necesitamos introducir más estructura en el problema, como para generar un mercado de trabajo segmentado, en el que los trabajadores de clase media se benefician del progreso técnico. Por otro lado, la introducción del salario mínimo, en algunos casos vinculado a las mejoras de productividad, podría estar en el centro de las causas del aumento del desempleo en Europa. Como puede verse en la ecuación (27), si el salario mínimo sigue la productividad, la edad de descarte de las máquinas se vuelve constante y la demanda de trabajo de acuerdo con la ecuación (2) tiende a cero, lo que produce un aumento permanente de la tasa de desempleo. En cualquier situación intermedia, en la que el salario mínimo siga a la productividad sólo de manera parcial, la tasa de desempleo permanecerá a niveles altos, pero no necesariamente convergerá a uno. Nótese que aunque la edad de las máquinas tiende a infinito, la edad media converge a $1/\gamma + \delta$.

5.3. La importancia cuantitativa del supuesto de forgetting

De los resultados anteriores puede deducirse que el supuesto de forgetting no añade mucho cualitativamente al modelo de Arrow. Sin embargo, parece que el modelo de Arrow no justifica bien algunas observaciones de la experiencia de crecimiento, fundamentalmente porque implica tasas de crecimiento y edades de máquinas demasiado altas. Si fijamos el período del modelo en un año y suponemos que la tasa de ahorro está alrededor de 0,27, y el ratio capital-output es 3, el modelo de LBD de Arrow predice una tasa de crecimiento anual de alrededor de 5,7 por 100, si $\beta = 1$, y del 9 por 100 si $\beta > 1$. A lo largo de la SCE, la edad de las máquinas es 17,5 años para $\beta = 1$, y la edad media de las máquinas converge a ese valor si $\beta > 1$.

Cuando introducimos el supuesto de depreciación de los efectos de la experiencia, forgetting, si hay rendimientos a escala en el conocimiento, $m = 0{,}06$ y $\delta = 0{,}0$, implica una tasa de crecimiento anual del 2 por 100 y una vida de las máquinas de 12,5 años. Si hay rendimientos crecientes a escala en el conocimiento, $\delta = 0{,}07$ implica una tasa de crecimiento anual del 2 por 100 y una edad media de las máquinas de 11 años.

6. Conclusiones

La literatura reciente en teoría del crecimiento ha llamado la atención sobre la capacidad de los modelos de vintage para justificar ciertas observaciones de la realidad. Sin embargo, las contribuciones a esta literatura en las que se endogeiniza el crecimiento en modelos de vintage no son abundantes, y en general dichas contribuciones se limitan al análisis del comportamiento de largo plazo del modelo. El marco para el análisis que presentamos en este artículo pretende ser una referencia a partir de la que estudiar el papel de las cosechas de capital en modelos de crecimiento endógeno. Dicho marco es por fuerza muy estilizado puesto que el objetivo de la investigación es la resolución completa de esta familia de modelos, lo que incluye el estudio de su dinámica de corto plazo.

A partir de este marco general, hemos tratado de poner de manifiesto algunas de las implicaciones de las distintas versiones del modelo que tienen mayor relevancia empírica. En particular, hemos seleccionado tres propiedades del modelo. En primer lugar, que los cambios en el output dependen de la diferencia entre *creación* (inversión hoy) y *destrucción* (inversión pasada). Esta propiedad de la tecnología da lugar a fluctuaciones que pueden justificar la evidencia sobre desviaciones observadas entre tasas de crecimiento y tasas de inversión a corto plazo. En segundo lugar, que es posible que la introducción de cosechas de capital haga compatible los rendimientos crecientes a escala con una senda de crecimiento económico acotada. Esta propiedad merece ser examinada en entornos que permitan cierta sustitución entre capital y trabajo, o que permitan un mercado de trabajo segmentado en el que los trabajadores no cualificados se benefician limitadamente del progreso técnico. Por último, el supuesto de depreciación de los efectos de la experiencia puede reconciliar el modelo básico de Learning by Doing con las observaciones de tasas de crecimiento y edades del capital que se observan en los países desarrollados.

Referencias bibliográficas

[1] ARROW, K. (1962): «The economic implications of learning by doing», *Review of Economic Studies,* 102, 155-173

[2] BAHK, B. y GORT, M. (1993): «Decomposing learning by doing in plants», *Journal of Political Economy,* 101, 561-583.

[3] BENHABIB, J. y RUSTICHINI, A. (1991): «Vintage capital, investment and growth», *Journal of Economic Theory,* 323-339.

[4] BENHABIB, J. y RUSTICHINI, A. (1993): «A vintage capital, model of investment and growth: theory and evidence», en R. Becker *et al.* (eds.), *General Equilibrium, Growth and Trade. II The Legacy of Lionel W. McKenzie,* Academic Press.

[5] BOUCEKKINE, R.; GERMAIN, M. y LICANDRO, O. (1997): «Replacement echoes in the vintage capital growth models», *Journal of Economic Theory,* 74, 333-348.

[6] BOUCEKKINE, R.; GERMAIN, M.; LICANDRO, O. y MAGNUS, A. (1998): «Creative destruction, investment volatility and the average age of capital», *Journal of Economic Growth,* 361-384.

[7] BOUCEKKINE, R.; LICANDRO, O. y PAUL, C. (1997): «Differential-Difference Equations in Economics: On the Numerical Solution of Vintage Capital Growth Models», *Journal of Economic Dynamics and Control,* 347-362.

[8] BOUCEKKINE, R.; LICANDRO, O.; PUCH, L. A. y DEL RIO, F. (2005): «Vintage Capital and the Dynamics of the AK Model», *Journal of Economic Theory,* 120, 39-72.

[9] D'AUTUME, A. y MICHEL, P. (1993); «Endogenous growth in Arrow's Learning by doing model», *European Economic Review,* 37, 1175-1184.

[10] JONES, C. (1995): «Time series tests of endogenous growth models», *Quarterly Journal of Economics,* 110, 495-525.

[11] ROMER, P. (1986): «Increasing returns and long-run growth», *Journal of Political Economy,* 94, 1002-1037.

[12] SOLOW, R.; TOBIN, J.; VON WEIZSACKER, C. y YAARI, M. (1966): «Neoclassical growth with fixed factors proportions», *Review of Economic Studies,* 94, 79-116.